ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Г.К.Муравин

Анализ выпускных работ за курс математики 11 класса привлек мое внимание к некоторым просчетам в отработке понятия области определения первообразной, вызванных в первую очередь неполным или неточным его освещением в действующих учебниках. Надеюсь, что эта статья в какой-то степени окажется полезной учителям математики, привыкшим компенсировать недостатки учебников.

В разделе *Трудные задачи* учебника «Алгебра и начала анализа 10-11» А.Н.Колмогорова и др. (издание 2000 г.) можно увидеть задачу №253 а) «Найдите все функции *f* такие, что $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ и *f*(3)= –1».

Трудность этой задачи заключается в различии между понятиями функции, имеющей данную производную, и первообразной для данной функции.

Рассмотрим решение задачи №253 а) подробно.

Начнем с вопроса об области определения функции *f*. Понятно, что при всех значениях *x*, при которых существует производная f' (как обычно, мы рассматриваем естественную область определения функции f'), функция *f* должна быть определена. Однако ничто не мешает ей быть определенной и при *x*=1, причем в этой точке функция *f* может принимать любое значение, лишь бы в этой точке у нее не было производной.

На промежутке *x*>1 любая из функций с производной $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ имеет следующий вид: $f(x)=\ln(x-1)+C$. По условию задачи должно выполняться равенство: $-1=\ln 2+C$, откуда $C=-1-\ln 2$. Таким образом, на промежутке *x* >1 все искомые функции задаются равенством:

$$f(x)=\ln(x-1)-1-\ln 2.$$

На промежутке *x* <1 любая из функций с производной $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ имеет следующий вид: $f(x)=\ln(1-x)+C$. Поскольку никаких дополнительных требований к поведению функции на этом промежутке в задаче нет, то любая из таких функций должна быть указана в ответе.

Таким образом, решение задачи – все функции *f*, такие, что:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)-1-\ln 2, & при\ \ x>1,\\ C_1, & при\ \ x=1,\\ \ln(1-x)+C_2, & при\ \ x<1,\end{cases}$$

где C_1 и C_2 – любые действительные числа.

Понятно, что исключение точки *x*=1 из области определения функции *f*(*x*) также даст функции, удовлетворяющие требованиям задачи: $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)-1-\ln 2, & при\ \ x>1,\\ \ln(1-x)+C, & при\ \ x<1.\end{cases}$

Таким образом, ответ $\ln|x-1|-\ln 2-1$, приведенный в учебнике, неверен.

Заметим, что совершенно аналогичная задача получается, если $\dfrac{1}{x-1}$ заменить выражением, например, $\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Тогда на промежутках, не содержащих *x*=1, функция *f* задается равенством $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+C$.

Поговорим теперь о первообразной, рассмотрев в качестве примера задачу, похожую на только что рассмотренную.

Задача 2. Найти такую первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, что $F(3) = -1$.

Многие ученики 11 класса воспринимают эту задачу как переформулировку только что рассмотренной. Однако это не совсем так. Напомним определение первообразной из вышеупомянутого учебника.

Функция F называется первообразной для функции f на данном промежутке, если для всех x из этого промежутка F'(x)=f(x).

Таким образом, во-первых, первообразная должна быть определена на промежутке, во-вторых, на этом промежутке должна быть определена и производная от первообразной. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ – это любой промежуток, не содержащий точку $x=1$. Рассматривая максимальные промежутки, мы можем сказать, что первообразные $F(x)$ для функции $f(x)$ могут быть определены или на промежутке $(1;+\infty)$, где они задаются формулой $F(x) = \ln(x-1)+C$, или на промежутке $(-\infty;1)$, на котором они имеют вид $F(x) = \ln(1-x)+C$. (Заметим, что известную формулу первообразных для функции $y=\dfrac{1}{x}$: $F(x) = \ln|x| + C$ следует воспринимать, как относящуюся к любому промежутку, не содержащему нуль, а отнюдь не к объединению промежутков $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, которое вроде бы является естественной областью определения функции F).

В соответствии со сделанными замечаниями, решение задачи 2 выглядит так.

Функция $F(x)$ принимает значение, равное -1, при $x=3$, принадлежащем промежутку $(1;+\infty)$. На этом промежутке $F(x) = \ln(x-1)+C$.

Имеем: $-1=\ln2+C$, $C=-1-\ln2$. Ответ. $F(x) = \ln(x-1)-1-\ln2$.

В данной задаче область определения первообразной $F(x)$ совпала с ее естественной областью определения, однако так бывает не всегда.

Задача 3. Найти такую первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, что $F(2) = 1$.

Решение. Областью определения первообразной F является один из промежутков $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$. Поскольку задано $F(2)$, $D(F) = (1;+\infty)$.

$F(x) = \dfrac{1}{1-x}+C$, $1=\dfrac{1}{1-2}+C$, $C = 2$. Ответ. $F(x) = \dfrac{1}{1-x}+2$, где $x > 1$.

Нетрудно заметить, что отсутствие в решении и ответе указаний на область определения функции $F(x)$ приведет к функции с другой областью определения ($x\neq1$), или попросту к другой функции. Понятно, что в этом случае ответ будет неверен, что и произошло в некоторых регионах России на выпускном письменном экзамене по математике, при выполнении четвертого задания варианта для общеобразовательных школ – цитирую по памяти: «Найти первообразную функции $f(x)= 2x - \dfrac{1}{x-3}$, график которой проходит через точку М(2;5)».

Следует отметить, что именно слабостью освещения вопроса области определения первообразной вызвана массовость допущенной выпускниками ошибки ($F(x) = x^2-\ln|x-3| + 1$) Так, например, в учебнике А.Н.Колмогорова и др. решения примера 2 пункта 27, а также примера 1 пункта 28, в которых вообще ничего не говориться об области определения первообразных, следует считать ошибочными. Правда, через некоторое время в пункте 42, рассматривая первообразную функции $y=\dfrac{1}{x}$, авторы учебника все-таки вспоминают о том, что первообразная определяется на промежутке. Но, увы, ненадолго, так как уже в ответе к №551 область определения не указывается.