Г.К.Муравин,О.В.Муравина, Москва

Последний урок по теме "Задачи на наибольшее и наименьшее значения"

Рациональность решения задач является важным критерием оценки математического уровня школьников. Однако в большинстве учебников этому аспекту математической подготовки уделяется мало внимания, и учителя ограничиваются отработкой стандартных приемов решения задач. В результате большинство школьников исследует квадратный трехчлен с помощью производной, решает квадратные неравенства методом интервалов. Слова "наибольшее значение" или "наименьшее значение" школьники связывают с поиском критических точек, даже в тех случаях, когда знание свойств квадратичной функции, взаимно обратных величин или сложной функции позволяет получить ответ практически устно. Много интересных задач на наибольшие или наименьшие значения есть и в геометрии. Рассмотрение этих задач со школьниками расширяет их представления о наибольших и наименьших значениях и путях их поиска.

Рассмотрим некоторые такие задачи из учебника Г.К. Муравина и О.В.Муравиной "Алгебра и начала анализа, 11 класс". Поскольку задачи на максимальные и минимальные значения изучаются практически всеми школьниками, этот материал, как мы надеемся, будет полезен и учителям, которые еще не работают по нашему учебнику.

На изучение пункта "Наибольшее и наименьшее значения функций" методические рекомендации к нашему учебнику в **гуманитарных профилях** отводят 4 урока, в **общеобразовательных классах** – 5, а в **математических профилях** – 6 уроков. Мы предлагаем после указанных уроков рассмотреть геометрические задачи, связанные с наибольшими и наименьшими значениями величин, использовав для этого один из уроков геометрии. Таким образом, этот урок в **гуманитарных профилях** следует за уроком 4, в **общеобразовательных классах** – за уроком 5, а в **математических профилях** – за уроком 6.

В начале урока учитель говорит школьникам, что урок посвящается задачам на наибольшие и наименьшие значения геометрических величин. После этого рассматриваются задачи.

Геометрия, как правило, не является сильной стороной учащихся, поэтому работа с классом проводится фронтально. Ученики читают по учебнику условие задачи, обдумывают его пару минут, а затем начинается совместная работа с учителем. Записи на доске выполняет учитель.

Рассмотрим решения задач, выделяя курсивом вопросы для обсуждения с классом.

№193. **Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данный круг, наибольшая площадь у равностороннего треугольника**.

При работе с этой задачей полезно задать следующие вопросы.

1. *Какой самый часто встречающийся способ доказательства в геометрии*? Доказательство от противного.

2. *Как иначе сформулировать, что треугольник не является равносторонним*? У треугольника есть пара неравных сторон.

3. *Предположим, что наибольшую площадь имеет неравносторонний треугольник ABC*, у которого $AB>BC$ (рис.1). *Что произойдет с площадью этого треугольника, если немного сдвинуть точку B по окружности от точки C*?

Высота, опущенная на сторону AC, увеличится, значит, увеличится и площадь треугольника.

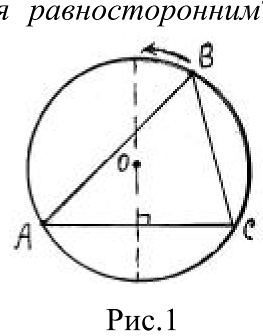


Рис.1

4. Значит, предположение о том, что треугольник, у которого есть неравные стороны, имеет наибольшую площадь неверно. Следовательно, наибольшую площадь имеет треугольник, у которого нет неравных сторон, т.е. равносторонний треугольник, что и требовалось доказать.

№197. **Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной укажите треугольник наибольшей площади**.

Вопросы при работе с задачей.

1. Две стороны треугольника известны. Ч*то еще нужно знать, чтобы найти его площадь*? Угол между сторонами треугольника. Обозначим угол между сторонами треугольника α, тогда площадь треугольника равна $0{,}5a^2\sin\alpha$.

2. *При каком значении* α *площадь треугольника наибольшая*? При $\alpha=90°$, значит, наибольшую площадь имеет прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом *a*.

№198. **На окружности радиуса 4 см взяты точки *A*, *B* и *C* так, что хорда *BC* перпендикулярна касательной, проведенной к окружности в ее точке *A*, и треугольник *ABC* имеет наибольшую возможную при этом площадь. Найдите площадь треугольника *ABC***.

Поиск решения проводится по выделенным вопросам.

1. *Как показать на рисунке, что прямая касается окружности в точке A*? Проведем радиус в точку касания и обозначим прямой угол (рис.2).

2. Непонятно, как выразить площадь треугольника *ABC* через радиус окружности. Попробуем заменить треугольник *ABC* равновеликим ему треугольником.

3. *Как можно двигать точку A, чтобы площадь треугольника ABC при этом не изменялась*? По прямой, параллельной *BC*.

4. *В какую точку этой прямой следует передвинуть точку A, чтобы легче было связать треугольник с радиусом окружности*?

В центр окружности.

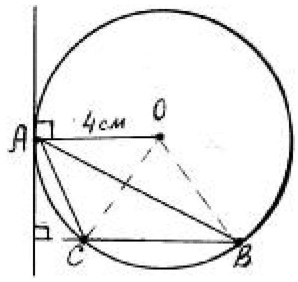


Рис.2

Получим треугольник *OBC* равновеликий треугольнику *ABC*.

5. *Что можно сказать о треугольнике OBC*?

Это равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 см.

6. *Какую наибольшую площадь он может иметь*? *Не можем ли мы воспользоваться для ответа на этот вопрос результатом предыдущей задачи*?

Треугольник *OBC* должен быть прямоугольным равнобедренным треугольником с катетом 4 см. Его площадь равна 8 см^2.

№199. **Какую наибольшую площадь может иметь треугольник со сторонами *a*, *b* и *c*, если $a\le 4$, $b\le 5$, $c\le 7$?**

Первая гипотеза, которая возникает у школьников, заключается в том, чтобы взять стороны максимальными и найти площадь треугольника по формуле Герона.

Попробуем упростить эту задачу, забыв на время о стороне *c*.

Вопрос 1. *Какую наибольшую площадь может иметь треугольник со сторонами a и b*?

Площадь треугольника $S=0{,}5ab\sin\alpha$. Нужно взять значения *a*, *b* и $\sin\alpha$ максимальными: $0{,}5\cdot4\cdot5\cdot1=10$ (см^2). Это наибольшая площадь, которую может иметь треугольник, одна сторона которого не больше 4, а другая не больше 5 сантиметров. Этот треугольник прямоугольный с катетами 4 см и 5 см. Остается вспомнить о стороне *c* и проверить, что гипотенуза *c* не больше 7 см, как требуется в условии задачи. По теореме Пифагора $c=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}<\sqrt{49}=7$. Значит, $c<7$ и искомая площадь равна 10 см^2.

Вопрос 2. *Можно ли было изначально взять стороны b и c, ведь в этом случае у нас получился бы прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 7 см, площадь которого* *больше*?

Нет. При этом было бы нарушено требование задачи $a \le 4$, так как гипотенуза такого треугольника заведомо больше катета, равного 5 см.

№190. **Запишите уравнение прямой, проходящей через точку *A*(2;3) и отсекающей от первого координатного угла треугольник с наименьшей площадью**.

Заметим, что задачи, аналогичные №190, имеются в большинстве учебников Алгебры и начал анализа. Учащиеся **общеобразовательных классов** и **математических профилей**, занимающиеся по нашему учебнику, уже рассматривали аналитическое решение этой задачи:

Искомая прямая (рис.3) пересекает ось ординат в точке $B(0;b)$ и ось абсцисс в точке $D(x;0)$.

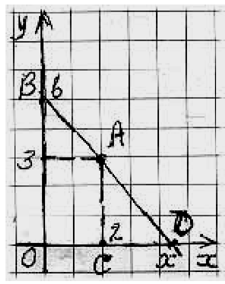


Рис.3

Треугольники BOD и ACD подобны, значит, $\dfrac{b}{3}=\dfrac{x}{x-2}$, $b=\dfrac{3x}{x-2}$.

Площадь $S(x)$ треугольника BOD равна $0,5bx=0,5\cdot\dfrac{3x^2}{x-2}$.

Найдем наименьшее значение $S(x)$ на промежутке $L=(2;+\infty)$.

$$S'(x)=0,5\cdot\frac{6x(x-2)-3x^2}{(x-2)^2}=0,5\cdot\frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

$S'(x)=0$ при $x_1=0$ (не входит в L) и при $x_2=4$.

$S'(x)$ при переходе через $x=4$ меняет знак с минуса на плюс, значит, по свойству единственной на промежутке критической точки $\min\limits_{L} S(x)=S(4)$.

Угловой коэффициент прямой равен $-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

Получаем искомое уравнение $y=6-\dfrac{3}{2}x$.

При разборе решения этой задачи учитель показывал школьникам, что координаты точек B и D удовлетворяют уравнению $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1$. Поскольку это уравнение первой степени, оно задает прямую, а через две точки проходит единственная прямая. Значит, это уравнение искомой прямой. Такой вид уравнения называют *уравнением прямой в отрезках*, так как в знаменателях дробей стоят длины отрезков, отсекаемых прямой на соответствующих координатных осях.

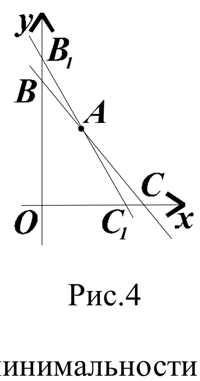


Рис.4

Геометрическое решение приведено в учебнике в разделе "Решения" и может быть рассмотрено на последнем "геометрическом" уроке.

Решение. Пусть прямая AC отсекает от первого координатного угла треугольник наименьшей площади (рис. 4). Предположим, что $AC>AB$. Повернем эту прямую вокруг точки A на небольшой угол так, чтобы все еще выполнялось неравенство $AC_1>AB_1$.

Заметим, что $S_{BOC}+S_{BAB_1}-S_{CAC_1}=S_{B_1OC_1}$. В силу соотношения сторон, заключающих равные вертикальные углы BAB_1 и CAC_1, получаем, что $S_{BAB_1}-S_{CAC_1}<0$. Отсюда $S_{BOC}>S_{B_1OC_1}$, что противоречит минимальности площади треугольника BOC. К этому противоречию нас привело предположение о том, что точка A делит отрезок BC на неравные части. Значит, точка A должна быть серединой отрезка BC. Это позволяет найти координаты точек $B(0;6)$ и $C(4;0)$ и записать уравнение прямой BC в виде $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1$ или $y=-1,5x+6$.

Полезно рассмотреть со школьниками геометрическую задачу на построение: "**Через точку внутри угла проведите прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади**".

Доказательство того факта, что отрезок искомой прямой, заключенный между сторонами угла, делится данной точкой пополам, можно провести аналогично решению задачи №190. Однако затем возникает вопрос о том, как построить эту прямую. То есть, как решить следующую задачу на построение:

"**Через точку внутри угла провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, в этой точке делился пополам**".

Используем обычный порядок решения задач на построение.

Первый этап – анализ. Проводим через точку M, расположенную внутри угла A, прямую BC и предполагаем, что она искомая. Желательно использовать цветной мел для проведения воображаемых линий, ведь на самом деле прямой BC нет, мы ее только *предполагаем.* Рассмотрим треугольник ABC. Точка M – середина стороны треугольника.

1. *В каких стандартных ситуациях говорится о середине стороны треугольника*? Теорема о средней линии, определение медианы.

2. *Можем ли мы провести среднюю линию*? Да, через точку M параллельно стороне AC угла BAC.

3. *Это реальная или предполагаемая линия? Нужно ли ее проводить цветным мелом*? Нет. Среднюю линию MN провести можно, так как даны точка M и сторона угла, параллельная средней линии.

4. *Можно ли теперь отметить белым мелом точку B*? Да, ее теперь можно получить, отложив на стороне угла от точки N отрезок, равный AN. Теперь имеем две точки искомой прямой, значит, ее можно провести.

Следующий этап – построение. Снова на доске изображается угол и точка внутри него. К доске вызывается ученик для выполнения самого построения и, объясняя свои действия, он от руки проводит необходимые линии.

5. *А если бы мы стали рассматривать точку M, как конец медианы треугольника*? *Какое стандартное дополнительное построение связано с медианой треугольника*?

Продолжение медианы на ее длину, и получение параллелограмма. Значит, мы можем построить вершину N параллелограмма $ABNC$.

6. *А как получить его вершину B*? Провести через точку N прямую, параллельную стороне AC.

Геометрическое решение задачи №190 позволит в дальнейшем рассмотреть со школьниками задачу №269 из темы "Интеграл и первообразная" нашего учебника.

№269. **При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x-3$ и прямой $y=kx+1$, будет наименьшей?**

Решение. Если точка $A(0;1)$ не является серединой отрезка секущей, заключенного внутри параболы (рис. 5), то секущую можно повернуть так, чтобы площадь отсекаемой фигуры уменьшилась, а значит, в этом случае площадь не минимальна. Здесь, конечно, следует напомнить, что в ближайшей окрестности любой своей точки парабола как бы сливается с касательной, поэтому угол поворота следует брать достаточно малым.

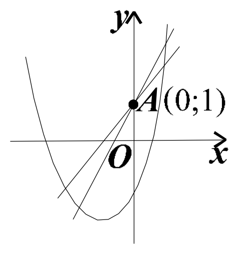


Рис.5

Таким образом, точка A должна быть серединой соответствующего отрезка. Отсюда следует, что абсциссы точек пересечения – корни уравнения $x^2+2x-3=kx+1$ должны быть противоположны. Раз корни квадратного уравнения $x^2+(2-k)x-4=0$ противоположны, то по теореме Виета коэффициент при x равен нулю: $2-k=0$ и, наконец, $k=2$.

Для любителей геометрии приведем еще три несложные геометрические задачи, не включенные в наш учебник.

Задача 1. **Найти углы треугольника со стороной *a* и противолежащим ей углом $\alpha°$, биссектриса которого имеет наибольшую длину**.

Решение. Заметим, что все треугольники со стороной a и противолежащим ей углом $\alpha°$ можно вписать в одну и ту же окружность – геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (на самом деле, конечно, таких окружностей две, но в данной ситуации нам вполне достаточно одной). Продолжения биссектрис этих треугольников пересекают окружность в конце диаметра, перпендикулярного хорде BC. Чем ближе третья вершина A треугольника ABC к другому концу этого диаметра, тем больше биссектриса угла A этого треугольника. Чтобы убедиться в этом, сравним биссектрисы треугольников A_1BC и A_2BC (рис.6).

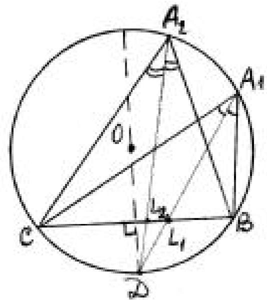


Рис.6

Заметим, что $A_2D>A_1D$ как хорда, расположенная ближе к центру окружности. Проекция на прямую BC наклонной DL_2 меньше проекции наклонной DL_1, значит, $DL_2< DL_1$. Имеем: $A_1L_1=A_1D–DL_1<A_1D–DL_2<A_2D–DL_2=A_2L_2$.

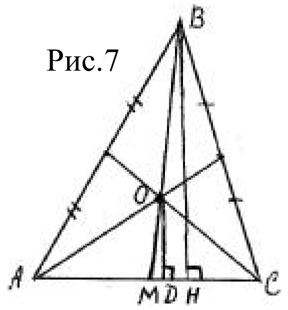
Понятно, что самой большой будет биссектриса, содержащаяся в диаметре AD. В этом случае треугольник равнобедренный и его углы: $\alpha°,\ 90°-\dfrac{\alpha°}{2},\ 90°-\dfrac{\alpha°}{2}$.

Сравнение длин биссектрис, проведенное в данном решении, можно использовать, например, при доказательстве признака равенства треугольников *по стороне, противолежащему ей углу и биссектрисе этого угла*. Использование упомянутого признака, в частности, сразу доказывает, что треугольник, имеющий пару равных биссектрис, является равнобедренным.

Задача 2. **Найти наибольшую площадь, которую может иметь треугольник, одна из медиан которого равна *m* см, а другая – *n* см**.

Решение. Заметим, что площадь треугольника ABC (рис.7) в 3 раза больше площади треугольника AOC, так как высоты этих треугольников, опущенные на их общую сторону AC, относятся как 3:1. Это следует из подобия треугольников MOD и MBH, так как $MB:MO = 3:1$. Наибольшую же площадь треугольник AOC имеет тогда, когда $AO\perp CO$. Этот вывод был сделан при решении №199. В этом случае $S_{ABC}=3S_{AOC}=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}m\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}n\right)=\dfrac{2}{3}mn$ (см^2).

Рис.7



Задача 3. **Найти углы треугольника наибольшей площади, имеющего две медианы по *m* см каждая**.

Решение. Воспользуемся результатами, полученными при решении предыдущей задачи. В треугольнике ABC наибольшей площади равные медианы AM и CN взаимно перпендикулярны (рис.8) и, поскольку они равны, то равны их части AO и CO, значит, треугольник AOC прямоугольный и равнобедренный. Его высота OH является медианой и $OH=AH$.

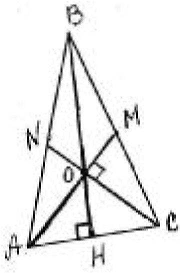


Рис.8

Высота BH является медианой треугольника ABC. Значит, $BH=3OH=3AH$. Из треугольника ABH находим $\angle ABH=\mathrm{arctg}\dfrac{AH}{BH}=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}$, $\angle BAH=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}$. Поскольку BH – биссектриса равнобедренного треугольника ABC, то $\angle ABC=2\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}$.