ОБЛАСТНАЯ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«ЮНОСТЬ ПОМОРЬЯ»

Направление **Математика**

Рациональные способы решения квадратных уравнений (по теореме Виета).

Исследовательская работа

Выполнена учеником 9 класса Б
муниципального бюджетного образовательного
учреждения «Средняя общеобразовательная школа №25»
города Северодвинска
Мишекуриным Александром Дмитриевичем

Научный руководитель – учитель муниципального
бюджетного образовательного учреждения
«Средняя общеобразовательная школа №25»
города Северодвинска
Красова Екатерина Трофимовна

г. Архангельск, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В курсе алгебры много квадратных уравнений и уравнений, сводящихся к их решению. В этом году я учусь в девятом классе, и буду сдавать экзамен по математике в форме ГИА, а в одиннадцатом классе – в форме ЕГЭ. При итоговой аттестации отводится четыре часа на выполнение всех заданий. Чтобы выполнить более сложные задания я должен сэкономить время.

Я провел социологический опрос среди учащихся 9 и 11 классов нашей школы, им было предложено ответить, что они используют при решении квадратных уравнений:

А) только формулу корней квадратного уравнения.

Б) теорему, обратную теореме Виета при решении приведённого уравнения $x^2 + px + q = 0$

В) условия $a + b + c = 0$ и $a - b + c = 0$.

Г) другие способы.

Результаты опроса представлены в таблице.

	11 А	**10 А**	**9 А**	**9 Б**	**Всего**
Количество опрошенных	17	22	16	23	**78**
А	9	18	11	11	**49**
Б	7	14	5	7	23
В	8	-	-	12	20
Г	3	1	2	1	7

Большинство учащихся при решении полных квадратных уравнений применяли только один способ – формулу корней квадратного уравнения. Для учеников, хорошо владеющих навыками устного счета, этот способ явно нерационален. Решать квадратные уравнения нам приходится часто, а тратить время на расчет дискриминанта просто жалко.

На мой взгляд, при изучении квадратных уравнений, следует уделить больше времени и внимания применению теоремы Виета. Знания этой теоремы, обратной и частных случаев теоремы, умение ими пользоваться необходимо. В этом заключается актуальность темы.

Цель работы: выявить эффективность теоремы Виета, использовать знания для выполнения заданий ГИА, ЕГЭ.

В связи с поставленной целью следует решить ряд задач:

1. Доказать эффективность теоремы Виета.
2. Показать рациональные способы решения квадратных уравнений.

Объект: теорема Виета, квадратные уравнения, уравнения сводимые к квадратным.

Методы: изучение теории, анализ различные способы решения квадратных уравнений, систематизация знаний.

Глава 1 Теорема Виета

1.1 Вклад Франсуа Виета в развитие математики.

Франсуа Виет (1540-1603) — замечательный французский математик, положивший начало алгебре как науке о преобразовании выражений, о решении уравнений в общем виде, создатель буквенного исчисления. Юрист по образованию, жил во Франции во времена, описанные в романе А. Дюма «Королева Марго».

Виет первым стал обозначать буквами не только неизвестные, но и данные величины. Тем самым ему удалось внедрить в науку великую мысль о возможности выполнять алгебраические преобразования над символами, т. е. ввести понятие математической формулы. Этим он внес решающий вклад в создание буквенной алгебры, чем завершил развитие математики эпохи Возрождения и подготовил почву для появления результатов Ферма, Декарта, Ньютона.

Франсуа Виет родился в 1540 году на юге Франции. Отец Виета был прокурором. По традиции, сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1560 году двадцатилетний адвокат начал свою карьеру в родном городе, но через три года перешел на службу в знатную гугенотскую семью. Он стал секретарем хозяина дома и учителем его дочери двенадцатилетней Екатерины. Именно преподавание пробудило в молодом юристе интерес к математике.

Главным замыслом ученого стало преобразование алгебры в мощное математическое исчисление.

Больших успехов достиг ученый и в области геометрии. Применительно к ней он сумел разработать интересные методы.

Глубокое знание алгебры давало Виету большие преимущества. Причем интерес его к алгебре первоначально был вызван приложениями к тригонометрии и астрономии. Виет первым стал применять скобки, которые, правда, у него имели вид не скобок, а черты над многочленом. Но многие знаки, введенные до него, он не использовал. Так, квадрат, куб и т. д. обозначал словами или первыми буквами слов.

Знаменитая теорема, устанавливающая связь коэффициентов многочлена с его корнями, была обнародована в 1591 году. Теперь она носит имя Виета, а сам автор формулировал ее так: «Если B+D, умноженное на A, минус A в квадрате равно BD, то A равно B и равно D». Теорема Виета стала ныне самым знаменитым утверждением школьной алгебры. Она достойна восхищения, тем более что ее можно обобщить на многочлены любой степени.

1.2 Теорема Виета.

Если уравнение квадратное $ax^2 + bx + c = 0$ имеет 2 корня, то их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$. Доказательство: По формулам корней квадратного уравнения, имеет:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Значит,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b-\sqrt{D}+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2}$, так как

$D = b^2 - 4ac$, тогда $x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$ (1, с.126-127).

1.3 Теорема, обратная теореме Виета.

Сформулируем теперь утверждение, обратное теореме Виета.

Любые 2 числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Для доказательства этого утверждение достаточно убедиться в том, что подстановка чисел x_1 и x_2 в это уравнение обращает его в верное равенство:

$$x_1^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Аналогично проверяется подстановка чисел x_2.

Доказанное утверждение (его часто называют *обратной теоремой Виета*) удобно использовать при отыскании корней приведённых квадратных уравнений с целыми коэффициентами (1, с.129).

1.4 Частные случаи теоремы Виета.

Теорема Виета позволяет устно найти корни полного квадратного уравнения. Нетрудно доказать, что число 1 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, тогда и только тогда, когда $a + b + c = 0$. Второй корень уравнения находится по теореме Виета и равен $\frac{c}{a}$. Ещё одно утверждение: чтобы число -1 являлось корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $a - b + c = 0$. Тогда второй корень уравнения по теореме Виета равен $-\frac{c}{a}$. Аналогичные утверждения можно сформулировать и для приведенного квадратного уравнения (1, с.127).

Глава 2 Практическое применение теоремы Виета

2.1 Рациональные способы решения полных квадратных уравнений.

Квадратное уравнение имеет два различных корня, когда $D > 0$ ($D = b^2 - 4ac$), два одинаковых корня при $D = 0$ и не имеет корней на множестве действительных чисел при $D < 0$.

Если $D > 0$ корни можно найти по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Однако при решении квадратного уравнения не стоит торопиться применять эту формулу, ведь часто корни квадратных уравнений можно найти проще. Я бы посоветовал решать уравнения по следующей схеме:

1. Квадратное уравнение сначала переписать, добиваясь того, чтобы коэффициенты стали целыми, а старший коэффициент ещё и положительным.

2. Затем следует устно проверить.

1) Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{c}{a}$

2) Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$ и $x_2 = -\dfrac{c}{a}$

3. В случае, когда квадратное уравнение приведенное, т.е. имеет вид $x^2 + px + q = 0$, можно попытаться подобрать сразу оба корня с помощью теоремы Виета (точнее говоря, теоремы, обратной теореме Виета).

4. Для корней уравнения $x^2 + 2px + q = 0$ с четным вторым коэффициентом применяется формула $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

Выделим основные этапы рассуждений при решении приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с помощью теоремы Виета: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$ (*)

- записать утверждение теоремы Виета;
- определить знаки корней уравнений (если произведение и сумма корней – положительные, то оба корня - положительные числа. Если произведение корней – положительное число, а сумма корней – отрицательное, то оба корня – отрицательные числа. Если произведение корней – отрицательное число, то корни имеют разные знаки). При этом если сумма корней – положительная, то больший по модулю корень является положительным числом, а если сумма корней меньше нуля, то больший по модулю корень – отрицательное число.

- подобрать пары целых чисел, произведение которых дает верное равенство записи(*);
- из найденный пар чисел выбрать ту пару, которая при подстановке во второе равенство в записи (*) даст верное равенство;
- указать в ответе найденные корни уравнения.

Заметим, что теорему Виета в принципе можно применить и для неприведенного полного квадратного уравнения: если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то для них выполняются равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Однако применение этой теоремы довольно проблематично, так как, по крайней мере, один из корней (при их наличии, конечно) является дробным числом. А работать с подбором дробей долго и трудно. Но все-таки выход есть.

Рассмотрим полное неприведённое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Умножим обе части уравнения на первый коэффициент a и запишем уравнение в виде $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$. Введем новую переменную $t = ax$ и получим приведенное квадратное уравнение $t^2 + bt + ac = 0$, корни которого t_1 и t_2 (при их наличии) могут быть найдены по теореме Виета. Тогда корни исходного уравнения будут $x_1 = \frac{t_1}{a}$, $x_2 = \frac{t_2}{a}$.
Обратим внимание, что составить вспомогательное приведенное уравнение $t^2 + bt + ac = 0$, очень просто: второй коэффициент сохраняется, а третий коэффициент равен произведению ac. При определенном навыке учащиеся сразу составляют вспомогательное уравнение, находят его корни по теореме Виета и указывают корни заданного полного уравнения.

2.2 Решение квадратных уравнений и уравнений, сводимых к квадратным.

Рассмотрим применения выше сказанного на конкретных примерах.

Пример 1. Задание из раздела 1 (1, с.6). Решить уравнение $2x^2 + 3x - 5 = 0$, т.к. $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{2} = -2{,}5$ (уравнение решается устно).

Ответ: $-2{,}5;1$

Пример 2. В задаче В-12 из ЕГЭ про мяч, где «$h(t) = 1{,}8 + 13t - 5t^2$. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 10м?» (4, с.19). Решение задачи сводится к решению неравенства в ходе, которого получаем уравнение: $5t^2 - 13t + 7{,}2 = 0$. Умножим обе части уравнения на 5 и составим вспомогательное уравнение: $x^2 - 13x + 36 = 0$, по т.Виета $x_1 = 4$ и $x_2 = 9$, а значит $t_1 = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $t_2 = \frac{9}{5} = 1{,}8$. Найденные корни используем при решении неравенства.

Пример 3. Задание из раздела 2 (1, с.102). Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

Пусть $x^2 = t$, где $t \ge 0$, тогда $t^2 - 2t - 8 = 0$ по т. Виета $t_1 = -2$, $t_2 = 4$. Решаем устно -2 не удовлетворяет условию $t \ge 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

Я постарался на первых примерах показать технологию применения теоремы Виета. Примеры были не сложные. Поэтому многие скажут, что не составит труда решить по традиционной формуле. Дальше я буду усложнять примеры.

Пример 4. Решите уравнение $2012x^2 - 2011x - 1 = 0$.

Решение: Проверяем частный случай $a + b + c = 0$. Значит, $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{2012}$.

Ответ: $-\frac{1}{2012}$;1. Я решил устно. Представьте сколько времени надо считать дискриминант без калькулятора.

Пример 5. Задание С-1 из ЕГЭ (4, с.87)

Решить уравнение $-2\cos^2 x + \left(2 - \sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0$.

Пусть $\cos x = t$, тогда $-2t^2 + \left(2 - \sqrt{2}\right)t + \sqrt{2} = 0$. Т.к. $a + b + c = 0$, то $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$,

значит $\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$, а тригонометрические уравнения я научусь решать позже.

Это задание было предложено решить учащимся 10 и 11 классов, на которое было отведено 5 минут. Из 39 учащихся справилось 3 учащихся (из 11А класса, т.к. использовали условие $a + b + c = 0$), остальные пытались решить по формуле $D = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \sqrt{2}$. Дальше испытывали трудность, не решили уравнение.

В заданиях С-3 тоже есть логарифмические и показательные уравнения, которые сводятся к квадратным и решаются устно.

Пример 6. Задание А-5 (7, с.7). Найдите площадь прямоугольника, длины сторон которого численно равны корням уравнения $\sqrt{2}x^2 - 17x + 3 = 0$.

I Способ.

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 289 - 12\sqrt{2}$

$x_{1,2} \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{289 - 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

Получается $x_1 = \dfrac{17 + \sqrt{289 - 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$ и $x_2 = \dfrac{17 - \sqrt{289 - 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

Значит, площадь прямоугольника равна $S = x_1 \cdot x_2$

$$S = \frac{17 + \sqrt{289 - 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{17 - \sqrt{289 - 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{17^2 - \left(\sqrt{289 - 12\sqrt{2}}\right)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{289 - 289 + 12\sqrt{2}}{4 \cdot 2} =$$

$$= \frac{12\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

II Способ.

Применим теорему Виета для квадратного уравнения $\sqrt{2}x^2 - 17x + 3 = 0$, по теореме $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, значит $S = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Это задание также было предложено решить учащимся 9А и 9Б классов. За 5 минут ни один из 39 учащихся не решил задания, т.к. начали решать I способом.

2.3 Разложение квадратного трёхчлена на множители.

Рассмотрим использование выше указанных способов при разложении квадратного трёхчлена на множители.

Пример 7. Задание из части 2, ГИА-2012 (5, с.136) №19.

Найдите значение выражения

$\dfrac{n}{n^2 - 4n + 4} - \dfrac{n-5}{n^2 - 7n + 10}$, при $n = 2 - \sqrt{7}$

Не выписывая уравнение $n^2 - 7n + 10 = 0$, решаем устно по теореме Виета $n_1 = 2$ и $n_2 = 5$, раскладываем на множители квадратный трёхчлен. Получим

$\frac{n}{(n-2)^2} - \frac{n-5}{(n-2)\cdot(n-5)} = \frac{n}{(n-2)^2} - \frac{1}{n-2}$. Упрощаем выражение до конца и находим значения выражения.

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$ (это задание студенты принесли Екатерине Трофимовне с первого курса высшего учебного заведения).

Я решаю устно, используя частный случай $a+b+c=0$, раскладывая многочлен на множители и перехожу $\lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{4\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)}{3\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{4\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)}{3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)} = \frac{4-3}{3+1} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$

2.4 Решение заданий с параметрами.

Учащееся испытывают трудности при решение заданий с параметрами, решая которые на ЕГЭ, получают наибольшее количество балов. Здесь на помощь тоже приходит теорема Виета.

Пример 9. Задание с параметром (6, с.3).

Пусть x_1 и x_2 – различные корни уравнения, $x^2-(a-3)x+1-3a=0$. При каких значениях a выполняется неравенство $x_1^2+x_2^2 \le x_1\cdot x_2+24$.

$$x^2-(a-3)\cdot x+1-3a=0$$
$$D=(a-3)^2-4(1-3a)=a^2+6a+5=(a+1)(a+5)$$
$$D>0,\ \text{при}\ a\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=a-3 \\ x_1\cdot x_2=1-3a \end{cases}$

$x_1^2+x_2^2 \le x_1\cdot x_2+24;$ $\quad (x_1+x_2)^2 \le 3x_1\cdot x_2+24$,

$(a-3)^2 \le 3\cdot(1-3a)+24;$ $\quad a^2+3a-18\le 0$

$$(a+6)\cdot(a-3)\le 0$$
$$-6\le a\le 3$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-5 \\ a>-1 \end{array}\right. \\ -6\le a\le 3 \end{cases}$$

$$a\in[-6;-5)\cup(-1;3]$$

Ответ: $a\in[-6;-5)\cup(-1;3]$

Для исследования квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ я предлагаю использовать следующую таблицу:

1. Оба корня положительные	$x_1 \neq x_2$ $x_1 > 0$ $x_2 > 0$	$\begin{cases} a \cdot c > 0 \\ D > 0 \\ a \cdot b < 0 \end{cases}$
2. Оба корня отрицательны	$x_1 \neq x_2$ $x_1 < 0$ $x_2 < 0$	$\begin{cases} a \cdot c > 0 \\ D > 0 \\ a \cdot b > 0 \end{cases}$
3. Корни разных знаков		$a \cdot c < 0$
4. Корни разных знаков, положительный по модулю больше отрицательного		$\begin{cases} a \cdot c < 0 \\ a \cdot b < 0 \end{cases}$
5. Корни разных знаков, положительный по модулю меньше отрицательного		$\begin{cases} a \cdot c < 0 \\ a \cdot b > 0 \end{cases}$

(Для удобства я заменил $\frac{b}{a}$; $\frac{c}{a}$ на произведение $a \cdot b$; $a \cdot c$. Полное обоснование на с.6-7 моей работы).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей работе я показал способы применения теоремы Виета. Где ею можно пользоваться и как это может помочь.

Когда я принёс свою работу моему руководителю. Екатерина Трофимовна, изучив её, некоторые мои наработки взяла на вооружение и познакомила ребят с рациональными способами решения полных, неприведённых квадратных уравнений.

Я надеюсь, что мне и ребятам, описанные мною способы решения квадратных уравнений помогут на экзаменах и в высших учебных заведениях.

В дальнейшем я хочу продолжить исследовать частные случаи теоремы Виета для квадратных уравнений с симметричными коэффициентами, а также более полное применение для выполнения заданий с параметрами.

Готовясь к школьной научной конференции, я столкнулся с заданием, которое в ноябре было на Молодежном математическом чемпионате (10-11 классов).

Пример 10. Если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$, то чему равно выражение $x_1^2 + x_2^2$?

А) 39; Б) 59; В) 76; Г) 78.

Решение:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 7^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 49$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 49 - 10$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 39$$

Ответ: А. Задание решено устно.

Так я помогаю выпускникам и студентам рационально решать квадратные уравнения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс. Дрофа. Москва. 2008.
2. Г.К. Муравин. Алгебра 8 класс. Дрофа. Москва. 2010.
3. Г.К. Муравин. Алгебра 9 класс. Дрофа. Москва. 2011.
4. А.Л. Семенова, И.В. Ященко ЕГЭ 2012. Математика. Типовые экзаменационные варианты. Москва. Национальное образование. 2011.
5. А.Л. Семенова, И.В. Ященко ГИА 2012. Математика. Типовые экзаменационные варианты. Москва. Национальное образование. 2011.
6. Методические указания к решению конкурсных задач по математике. Санкт-Петербург. 2004.
7. Тесты математика, варианты и ответы централизованного (абитуриентского) тестирования, пособие для подготовки к тестированию. Москва. 2004.